

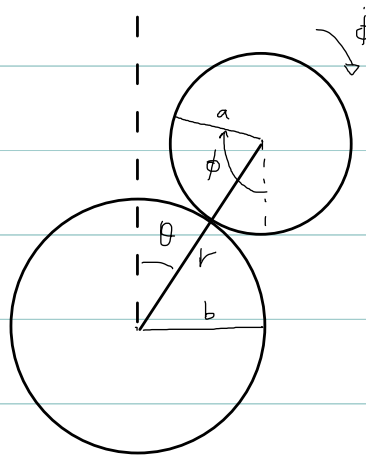
Aula 7 - Mult. Lagrange p/ vínculos holônomos

Pode ser conveniente tratar vínculos holônomos como um caso particular dos vínculos $\bar{n}$ -holônomos lineares, através da correspondência

$$f_l(q_1, \dots, q_t) = 0 \rightarrow \frac{df_l}{dt} = \boxed{\sum_k \frac{\partial f_l}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f_l}{\partial t} = 0} \quad (\text{ie, } q_{lk} = \frac{\partial f_l}{\partial q_k}; q_{lt} = \frac{\partial f_l}{\partial t})$$

Podemos então usar o mesmo formalismo de mult. de Lagrange. Isso é útil qdo queremos encontrar as forças de vínculo, ou qdo não queremos usar o n° mínimo possível de coordenadas generalizadas

ex 2.4.3: cilindro rolando sem deslizar sobre outro fixo



$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{ma^2}{2}}_I \dot{\phi}^2 - mgr \cos \theta$$

aparentemente, esse vínculo $\bar{n}$ é holônomo por si só, mas em conjunto com o outro (substituindo r por uma constante), é.

$$\text{vínculos: } \begin{cases} f_1(r, \theta, \phi) \equiv r - (a+b) = 0 & (\text{mantém contato}) \rightarrow r = 0 \\ \text{(holônomos)} \end{cases} \quad \underbrace{a\dot{\phi} = r\dot{\theta} = (a+b)\dot{\theta}}_{\text{rolar sem deslizar}} \rightarrow f_2(r, \theta, \phi) = (a+b)\theta - a\phi - ct_0 = 0$$

Como os vínculos são holônomos, podemos, em princípio, substituí-los diretamente em L :

$$L = m(a+b)^2 \left[\frac{3}{4} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{(a+b)} \cos \theta \right] \longrightarrow \boxed{\frac{3}{2} (a+b) \ddot{\theta} - g \sin \theta = 0}$$

Nesse caso, porém, não obtemos informações sobre as forças de vínculo. P. exemplo: em algum momento o vínculo de contato deixa de ser possível (qdo $N \rightarrow 0$). P/ qual ângulo isso ocorre?

P/ responder: reexpressamos o problema em termos de mult. de Lagrange:

$$q_1 = r ; q_2 = \theta ; q_3 = \phi$$

↪ Nivaldo aqui usa "r", o que é correto mas obscurece o fato de que os vínculos só são holônomos p/ r fixo.

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial r} = 1 ; a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = (a+b) ; a_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial \phi} = -a$$

eqs. de Lagrange c/ multiplicadores

$$m\ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 + m g \cos \theta = \lambda_1 q_{11}^1 \longrightarrow -m(a+b)\ddot{\theta} + m g \cos \theta = \lambda_1$$

$$m \frac{d}{dt} (r \dot{\theta})^2 - m g r \sin \theta = \lambda_2 a_{22} = (a+b) \lambda_2 \longrightarrow m(a+b) \ddot{\theta} - m g \sin \theta = \lambda_2$$

$$I \ddot{\phi} = \lambda_2 a_{23} = -a \lambda_2 \longrightarrow \frac{m a^2}{2} \cdot \frac{(a+b) \ddot{\theta}}{a} = -a \lambda_2$$

↪ aqui se obtém a mesma eq p/ θ de antes

Agora porém podemos obter a força de reação normal, responsável por manter o 1º vínculo

$$N = F_r = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{Q}_r = \sum_{\ell} q_{\ell 1} \lambda_{\ell} = \lambda_1 = m g \cos \theta - m(a+b) \dot{\theta}^2$$

Podemos relacionar N a θ diretamente fazendo uso da cons. de energia (válida, já que não há deslizamento)

$$E = \frac{3}{4} m(a+b)^2 \dot{\theta}^2 + mg(a+b) \cos \theta$$

se em $t=0$ $\dot{\theta} = \theta = 0 \rightarrow E = mg(a+b) \Rightarrow m(a+b)\dot{\theta}^2 = \frac{4}{3} mg(1 - \cos \theta)$

$$\rightarrow N = \frac{mg}{3} [3 \cos \theta + 4 \cos \theta - 4] = \frac{mg}{3} [7 \cos \theta - 4]$$

$$\therefore N=0 \leftrightarrow \cos \theta = \frac{4}{7} \rightarrow \theta \approx 55.1^\circ$$

obs: como $F_{at} < N$, antes de chegarmos a $N=0$ F_{at} ficará fraca demais p/ manter o vínculo de rolamento, o que fará a esfera começar a deslizar antes de perder o contato com a base. V ex. 2.25 p/ mais detalhes.

— 11 —

Reinterpretação

No caso holônomo, podemos ^{também} reinterpretar os multiplicadores $\lambda_1 \dots \lambda_p$ como coordenadas generalizadas independentes e adicionais a $q_1 \dots q_n$. Nesse caso, as eqs (**) acima e as eqs de vínculo podem ser ambas vistas como eqs de Euler-Lagrange para a Lagrangiana modificada

$$L' = L(q, \dot{q}, t) + \sum_{\ell=1}^p \lambda_{\ell} f_{\ell}(q, t)$$

Numerais $\mathcal{J}_1 \dots \mathcal{J}_n = q_1 \dots q_n$, $\mathcal{J}_{n+1} \dots \mathcal{J}_{n+p} = \lambda_1 \dots \lambda_p$, então

$$0 = \frac{\partial L'}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} + \sum_{\ell} \lambda_{\ell} \frac{\partial f_{\ell}}{\partial q_n}$$

$$0 = \frac{\partial L'}{\partial \lambda_{\ell}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}_{\ell}} = f_{\ell}(q, t)$$

Assim, na presença de vínculos holônomos, as eqs de mov. corretas são obtidas aplicando-se o princ. de Hamilton à ação $S' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt$, considerando-se q_k 's e λ_{ℓ} 's como tendo variações independentes